

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-526-5

Bab 5

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan menyelesaiakannya; serta
2. Memodelkan masalah ke dalam sistem pertidaksamaan linear dan menyelesaiakannya.

Perhatikan beberapa contoh berikut.

1. Daftar menu terdiri atas berbagai paket. Di setiap paket, jenis makanan sama, namun berbeda-beda banyaknya. Apakah lebih ekonomis membeli paket makanan atau memesan setiap jenis makanan secara terpisah?
2. Seekor pemangsa mengejar mangsanya. Jika diketahui kecepatan dan posisi awal masing-masing, akankah pemangsa berhasil mengejar mangsanya?
3. Dalam produksi, ada biaya tetap (misalnya pembelian mesin, sewa tempat) dan ada biaya yang tergantung pada banyaknya benda yang diproduksi (misalnya bahan baku). Harga penjualan hanya tergantung pada banyaknya benda yang dijual. Setidaknya berapa banyak benda yang harus terjual supaya perusahaan tidak merugi?

Pertanyaan-pertanyaan di atas adalah contoh pertanyaan yang bisa dijawab dengan menggunakan sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear.

Sistem persamaan linear adalah gabungan beberapa persamaan linear. Penyelesaiannya adalah nilai yang memenuhi semua persamaan linear.

Mirip dengan itu, sistem pertidaksamaan linear terdiri atas beberapa pertidaksamaan linear dan penyelesaiannya membuat semua pertidaksamaan linear bernilai benar.

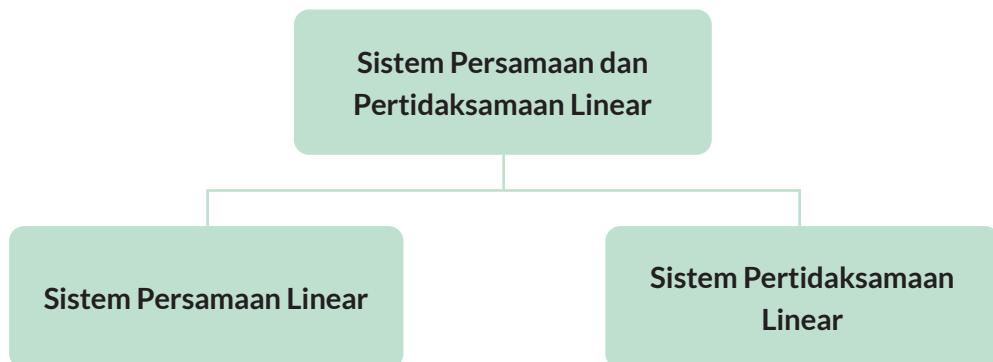
Pertanyaan pamtik

- Bagaimana mengubah persoalan ini menjadi sistem persamaan/pertidaksamaan linear?
- Apa artinya mencari solusi?
- Solusi sistem persamaan/pertidaksamaan linear ini menyatakan apa?

Kata Kunci

Sistem persamaan linear, sistem pertidaksamaan linear, solusi/penyelesaian, variabel.

Peta Konsep



Ayo Mengingat Kembali

Di SMP kalian telah mempelajari sistem persamaan linear dengan dua variabel. Sistem persamaan linear adalah kumpulan beberapa persamaan linear yang saling terkait. Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah nilai-nilai yang memenuhi semua persamaan tersebut.

Contoh masalah yang dapat dimodelkan dengan sistem persamaan linear.

Sebuah toko alat tulis menjual paket alat tulis. Paket A seharga Rp18.000,00 berisi lima buku tulis dan dua pensil. Paket B berisi sebuah buku tulis dan dua pensil dihargai Rp10.000,00. Berapakah harga masing-masing buku tulis dan pensil?

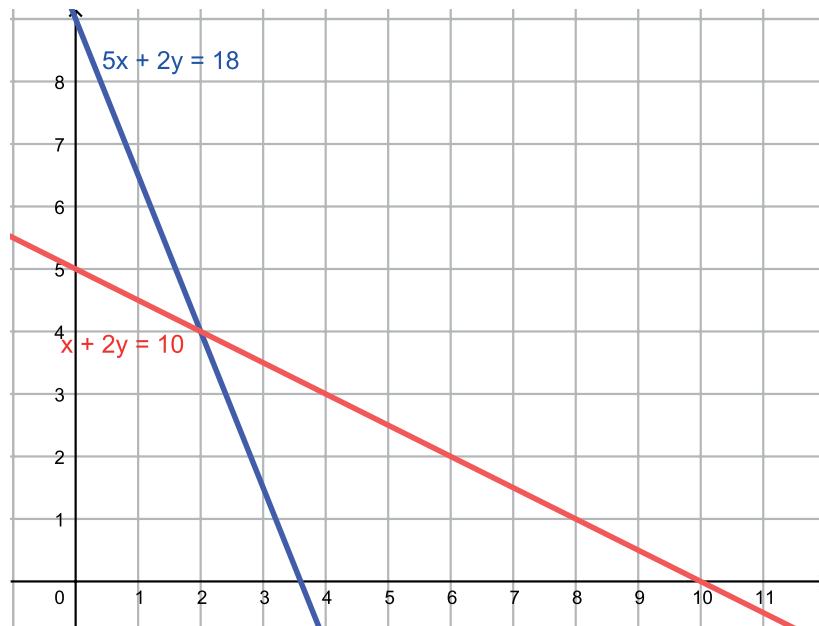
Penyelesaian:

Jika b menyatakan harga sebuah buku tulis
dan p menyatakan harga sebuah pensil
maka model matematikanya (dalam ribuan rupiah) adalah

$$\begin{cases} 5b + 2p = 18 \\ b + 2p = 10 \end{cases}$$

Model matematika tersebut terdiri atas dua persamaan dengan dua variabel. Semua variabelnya berpangkat satu, artinya kedua persamaan di atas adalah persamaan linear. Solusi dari sistem persamaan linear tersebut menyatakan harga buku dan harga pensil.

Grafik dari sistem persamaan linear tersebut ditampilkan pada Gambar 5.1.



Gambar 5.1 Grafik Sistem Persamaan Linear

Permasalahan Harga Pensil dan Buku

Solusi dari sistem persamaan linear adalah koordinat titik potong kedua garis. Kalian dapat memasukkan nilai $b = 2$ dan $p = 4$ ke dalam persamaan dan lihatlah bahwa harga tersebut membuat kedua persamaan benar. Harga buku Rp2.000,00 dan harga pensil Rp4.000,00.

A. Sistem Persamaan Linear

Setelah menguasai tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel, mari mempelajari sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Apa hal-hal yang sama dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel? Apa saja perbedaannya?

Eksplorasi 5.1



Ayo Bereksplorasi



Gambar 5.2 Bola Basket

Dalam olah raga basket, ada tiga macam nilai yang dihasilkan. Lemparan bebas yang masuk bernilai 1, lemparan dari dalam daerah bernilai 2, dan lemparan dari luar daerah bernilai 3. Wijaya mencetak nilai 27 dalam sebuah pertandingan. Ia memasukkan bola 16 kali ke dalam keranjang dengan 6 di antaranya berupa lemparan bebas. Tentukan berapa kali ia mencetak masing-masing angka.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kalian menyelesaikan masalah ini?

1. Salah satu strategi yang dapat kalian gunakan adalah tebak dan perbaiki. Tebak, hitung nilainya. Jika bukan 27, perbaiki tebakan kalian.

1 angka	2 angka	3 angka	nilai

2. Tuliskan strategi lain yang kalian coba.



Ayo Berpikir Kritis

Apakah strategi yang berbeda menghasilkan jawaban yang sama?
Mengapa?

Alternatif Penyelesaian

Masalah bola basket di atas dapat diselesaikan dengan sistem persamaan linear.

1. Tentukan variabelnya. Pikirkan: apa yang diketahui? Apa yang ditanya?

Lemparan bebas yang masuk bernilai 1, lemparan dari dalam daerah bernilai 2, dan lemparan dari luar daerah bernilai 3.

Dari kalimat ini kalian dapat berpikir bahwa ada sebuah variabel untuk setiap nilai yang mungkin (misalnya a , b , c berturut-turut adalah banyaknya lemparan yang bernilai 1, 2, dan 3).

2. Tentukan model matematikanya.

a. Wijaya mencetak nilai 27 dalam sebuah pertandingan.

$$a + 2b + 3c = 27$$

b. Ia memasukkan bola 16 kali ke dalam keranjang.

$$a + b + c = 16$$

c. 6 di antaranya berupa lemparan bebas

$$a = 6$$

3. Ada 3 persamaan dengan 3 variabel dan semua variabelnya berpangkat 1. Ini adalah sebuah sistem persamaan linear.

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 27 \\ a + b + c = 16 \\ a = 6 \end{cases}$$

4. Kalian pernah belajar menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan eliminasi atau substitusi. Metode yang sama dapat kalian gunakan pada sistem persamaan linear tiga variabel (dengan pengulangan yang lebih banyak).

Untuk soal ini:

- Substitusi $a = 6$ ke $a + b + c = 16$ menghasilkan $b + c = 10$
- Substitusi nilai $a = 6$ dan $b + c = 10$ ke $a + 2b + 3c = 27$ menghasilkan nilai $c = 1$
- Substitusi nilai a dan c menghasilkan nilai $b = 9$

5. Setelah mendapatkan solusi, tuliskan makna solusi tersebut dalam masalah sesungguhnya.

Untuk soal ini: Ada 6 lemparan bebas, 9 lemparan dari dalam daerah bernilai 2 angka, dan 1 lemparan dari luar daerah bernilai 3 angka.



Ayo Berpikir Kritis

Berapa persamaan yang dibutuhkan untuk membentuk sistem persamaan linear dengan 3 variabel?

Ada berapa solusi yang dimiliki sistem persamaan linear?

Dalam sistem persamaan linear dengan dua variabel, ada 3 kemungkinan banyaknya solusi:

- Sistem persamaan linear memiliki satu solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berpotongan. Solusinya adalah titik potong kedua garis.
- Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi. Grafiknya berupa dua garis yang sejajar.
- Sistem persamaan linear memiliki banyak solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berimpit. Semua titik pada garis ini merupakan solusi.

Tabel 5.1 menunjukkan contoh sistem persamaan linear untuk setiap jenis solusi, dengan grafik masing-masing.

Tabel 5.1 Contoh Sistem Persamaan Linear dengan Banyaknya Solusi yang Berbeda-beda

No.	Sistem Persamaan Linear	Grafik	Titik Potong
1	$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$		1 titik potong di (-1,2)
2	$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 5 \end{cases}$		tidak ada titik potong
3	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$		banyak titik potong

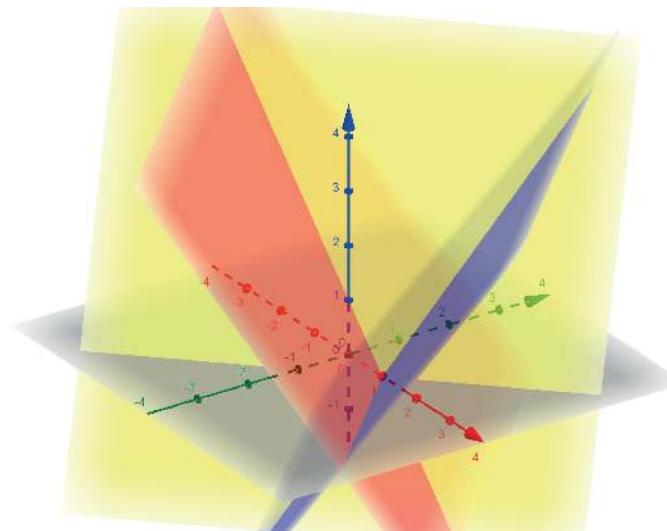
Pada sistem persamaan linear dengan tiga variabel, juga ada tiga kemungkinan banyaknya solusi.

Bagaimana menggambarkan grafik sistem persamaan linear dengan tiga variabel?

Dalam grafik, persamaan linear dengan tiga variabel berupa bidang. Perpotongan dua bidang menghasilkan garis, sedangkan perpotongan tiga bidang berupa titik.

Gambar 5.3 adalah grafik sistem persamaan linear berikut. Ketiga bidang berpotongan di titik (1,0,0).

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$



Gambar 5.3 Grafik Sistem Persamaan Linear dengan Tiga Variabel



Ayo Menggunakan Teknologi

Jika kalian ingin membuat grafik sistem persamaan linear dengan tiga variabel, kalian dapat memanfaatkan aplikasi *GeoGebra*.



Ayo Bekerja Sama

Ayo kerjakan soal-soal berikut bersama teman-temanmu.

Latihan 5.1

1. Asep memiliki beberapa tongkat dengan tiga jenis ukuran, ukuran a , ukuran b , dan ukuran c . Asep menjajarkan 3 tongkat ukuran a , 2 tongkat ukuran b , dan 1 tongkat ukuran c dan panjangnya 390 cm. Asep menjajarkan sebuah tongkat ukuran a , 3 tongkat ukuran b , dan 2 tongkat ukuran c dan panjangnya 460 cm. Asep juga mengamati bahwa 2 tongkat ukuran a sama panjang dengan tongkat ukuran c .
 - a. Tuliskan pengukuran pertama ke dalam persamaan matematika.
 - b. Tuliskan hasil pengukuran kedua dan ketiga ke dalam persamaan matematika juga untuk menghasilkan sistem persamaan.
 - c. Apakah sistem persamaan itu sebuah sistem persamaan linear? Bagaimana kamu tahu?
 - d. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
 - e. Ada berapa solusi yang ada?
 - f. Berapakah panjang tiap jenis tongkat?
2. Sebuah minuman dijual dalam tiga kemasan berbeda: kecil, sedang, dan besar. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 2 kemasan sedang, dan 3 kemasan besar, dia mendapat minuman sebanyak 4.700 ml. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 1 kemasan sedang, dan 2 kemasan besar, dia mendapat 3.300 ml. Jika Bonar membeli 2 kemasan sedang dan 2 kemasan besar, dia mendapat 2.800 ml minuman. Berapakah volume tiap jenis kemasan?
 - a. Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
 - b. Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
 - c. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
 - d. Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
 - e. Apa artinya bagi Bonar jika sistem persamaan linear ini memiliki banyak solusi?

3. Bu Wati membeli tiga jenis buah. Kalau ia membeli 3 kg jeruk, 3 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp130.000,00. Jika Bu Wati membeli 2 kg jeruk, 2 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp100.000,00. Jika Bu Wati mau membeli 1 kg jeruk dan 1 kg pepaya, ia harus membayar Rp50.000,00. Berapakah harga tiap kg setiap jenis buah?

- Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
- Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
- Selesaikan sistem persamaan tersebut.
- Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
- Apa artinya bagi Bu Wati jika sistem persamaan linear ini tidak memiliki solusi?

4. Untuk setiap model matematika berikut, tentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem persamaan linear atau bukan. Jelaskan.



Ayo Berpikir Kritis

a.
$$\begin{cases} 5x - 3y = 10 \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 20 \\ 3x + 4y - z = 15 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 15x - 23y + 2z = 200 \\ 31x + 42y - \frac{1}{z} = 150 \\ 23x - 45y - 33z = 100 \end{cases}$$

$$\text{e. } \begin{cases} x - 3y + 2z = 20 \\ 2x + y - 3z = 15 \\ 3x - 2y - z = 35 \end{cases}$$

5. Pak Musa memiliki toko beras dan menjual campuran beras. Campuran 2 kg beras A, 2 kg beras B, dan 1 kg beras C dihargai Rp50.000,00. Campuran 4 kg beras A, 2 kg beras B, dan 3 kg beras C dihargai Rp91.000,00. Campuran 4 kg beras A, 4 kg beras B, dan 2 kg beras C dihargai Rp95.000,00. Tentukan harga tiap kg beras A, beras B, dan beras C.
 - a. Tuliskan model matematikanya.
 - b. Apakah model matematika itu merupakan sistem persamaan linear?
 - c. Ada berapa solusi yang dimiliki oleh sistem ini? Bagaimana kalian tahu?
6. Maria adalah penjaga tiket di sirkus. Ada tiga jenis tiket yang dijual. Keluarga Andi membeli 4 tiket anak-anak, 2 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp640.000,00. Keluarga Butet membeli 1 tiket anak-anak, 3 tiket dewasa, dan 2 tiket lansia dan membayar Rp550.000,00. Keluarga Danu membeli 3 tiket anak-anak, 1 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp450.000,00. Berapakah harga setiap jenis tiket yang dijual Maria?
7. Kinan menimbang bola yang ada di lemari sekolah. Pada penimbangan pertama, Kinan menimbang dua bola basket, sebuah bola kaki, dan tiga bola voli dan hasilnya 2.500 g. Penimbangan kedua, sebuah bola basket, dua buah bola kaki, dan dua buah bola voli beratnya 2.050 g. Penimbangan ketiga, dua buah bola basket dan sebuah bola voli beratnya 1.550 g. Berapa berat tiap jenis bola?



8. Butet ingin membeli buah. Semua buah yang ada sudah dikemas menjadi paket. Paket A terdiri atas 5 jeruk, 1 mangga, dan 8 salak beratnya 1,5 kg. Paket B terdiri atas 10 jeruk, 2 mangga, dan 4 salak beratnya 2 kg. Paket C terdiri atas 3 mangga, dan 12 salak beratnya 2 kg. Jika setiap jenis buah itu identik, berapakah berat masing-masing jenis buah?

Refleksi

Dalam subbab ini kalian telah mempelajari tentang sistem persamaan linear dengan tiga variabel.

1. Ada berapa persamaan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan tiga variabel?
2. Bagaimana kalian tahu jika sebuah sistem persamaan linear tidak memiliki solusi?
3. Bagaimana kalian tahu jika sebuah sistem persamaan linear memiliki banyak solusi?

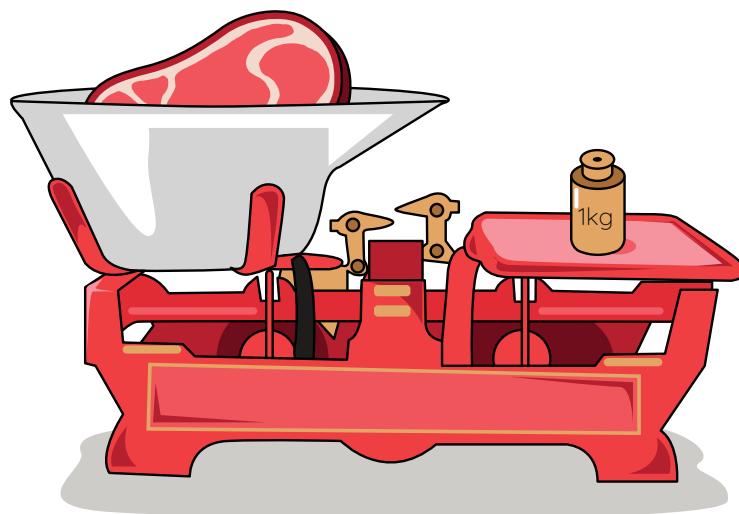
B. Sistem Pertidaksamaan Linear

Selain ada istilah **persamaan**, dikenal juga istilah **pertidaksamaan**. Demikian juga selain ada sistem persamaan linear, ada juga sistem pertidaksamaan linear. Bagaimana kaitannya?

Eksplorasi 5.2



Ayo Bereksplorasi



Gambar 5.4 Timbangan Dua Lengan

Pak Eko menimbang buah menggunakan timbangan dua lengan. Dua buah apel dan lima buah jeruk beratnya kurang dari 1 kg. Enam buah apel dan dua buah jeruk beratnya lebih dari 1 kg. Jika dianggap setiap apel beratnya sama dan setiap jeruk beratnya sama, berapakah berat setiap apel? Berapakah berat setiap jeruk?

1. Cobalah mengerjakan soal ini dengan metode coba dan perbaiki.

Berat 1 apel	Berat 1 jeruk	Berat 2 apel dan 5 jeruk	Berat 6 apel dan 2 jeruk



Ayo Berpikir Kritis

Strategi apa lagi yang dapat kalian coba?

2. Apakah yang telah kalian pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantu kalian menyelesaikan masalah ini?

Permasalahan yang dihadapi oleh Pak Eko dapat dituliskan model matematikanya.

1. Tentukan variabelnya. Pikirkan: apa yang diketahui? Apa yang ditanya?

Untuk soal ini berat 1 apel (misal disebut x) dan berat 1 jeruk (misal disebut y)

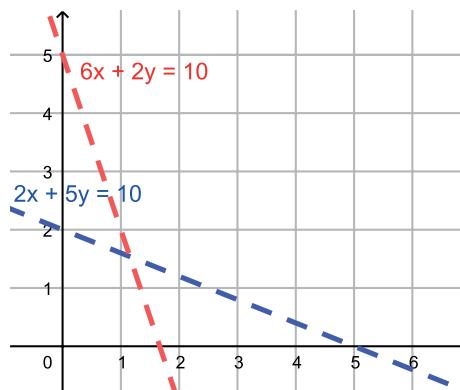
2. Model matematikanya (dalam satuan ons, 1 kg = 10 ons):

$$\begin{cases} 2x + 5y < 10 \\ 6x + 2y > 10 \end{cases}$$

3. Model matematika ini mengingatkan kita pada sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$

4. Grafik sistem persamaan linear ini



Ayo Berpikir Kritis

- Apakah titik $(0,0)$ merupakan daerah hasil pertidaksamaan $2x + 5y < 10$?
Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.
- Apakah titik $(0,0)$ merupakan daerah hasil pertidaksamaan pertidaksamaan $6x + 2y > 10$? Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.

Eksplorasi 5.3



Ayo Bereksplorasi



Gambar 5.5 Lomba Balap Karung

Kiki adalah panitia perayaan hari kemerdekaan di RT. Dari kas RT ada uang sebesar Rp500.000,00 yang dapat digunakan. Untuk penyelenggaraan perlombaan, dibutuhkan Rp20.000,00 per anak. Hadiah untuk pemenang dianggarkan Rp40.000,00 untuk setiap jenis perlombaan. Diharapkan ada lebih dari 13 anak yang berpartisipasi. Tentukan apa saja kemungkinannya.



Ayo Berdiskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kalian menyelesaikan masalah ini?

1. Salah satu strategi yang dapat kalian gunakan adalah tebak dan perbaiki. Tebak, hitung nilainya. Jika tidak memenuhi syarat, perbaiki tebakan kalian.

banyaknya perlombaan	biaya hadiah	banyaknya anak	biaya penyelenggaraan	biaya total

2. Tuliskan strategi lain yang kalian coba.



Ayo Berpikir Kritis

Apakah strategi yang berbeda menghasilkan jawaban yang sama?
Mengapa?

3. Apakah yang telah kalian pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantu kalian menyelesaikan masalah ini?

Alternatif Penyelesaian

Masalah yang dihadapi Kiki dapat diselesaikan dengan sistem pertidaksamaan linear.

1. Tentukan model matematikanya. Jika x menyatakan banyaknya peserta dan y menyatakan banyaknya perlombaan maka model matematikanya adalah:

$$\begin{cases} 20x + 40y \leq 500 \\ x > 13 \end{cases}$$

Ini adalah sebuah sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel

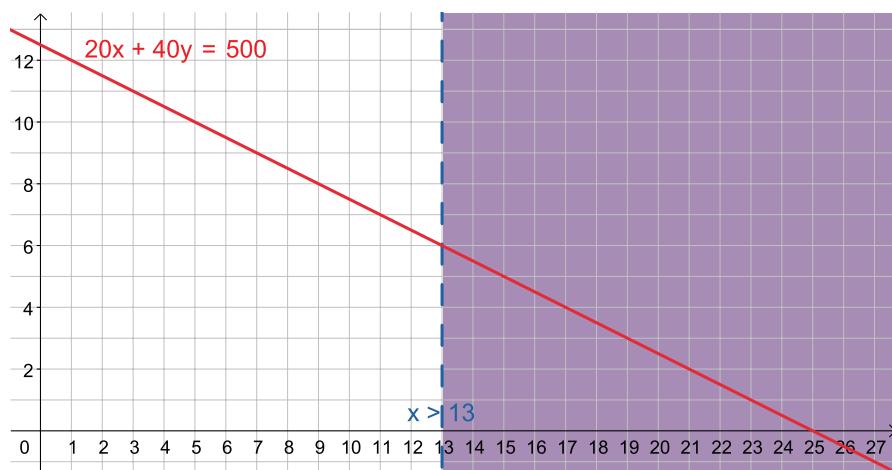
2. Kalian telah belajar menyelesaikan sistem persamaan linear. Pengetahuan ini dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear.

a. Gambarkan grafik sistem persamaan linear yang berpadanan. Yang dimaksud adalah sistem persamaan linear yang didapat dengan mengubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan.

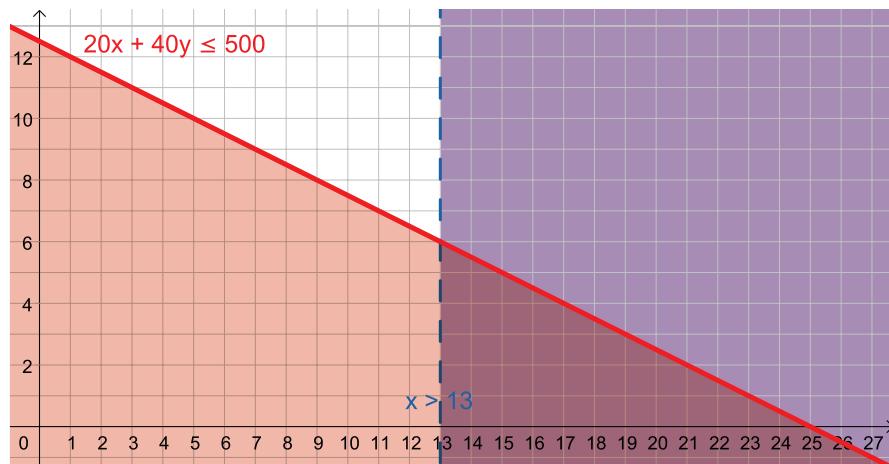
$$\begin{cases} 20x + 40y = 500 \\ x = 13 \end{cases}$$

b. Perlu dicatat bahwa garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih atau sama dengan** dan **kurang atau sama dengan** digambarkan dengan garis utuh (artinya garis tersebut termasuk daerah jawaban) sedangkan garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih dari** atau **kurang dari** digambarkan dengan garis putus-putus (artinya garis tersebut hanya batas, tidak termasuk daerah jawaban).

c. Pilih sebuah titik, misalnya $(0,0)$, lalu substitusikan ke dalam pertidaksamaan. Jika nilainya memenuhi ketidaksamaan maka daerah yang memuat $(0,0)$ diarsir untuk menunjukkan bahwa daerah inilah yang merupakan daerah hasil. Garis persamaan linear menjadi pembatas antara daerah jawab dan bukan daerah jawab.



- d. Lakukan hal yang sama untuk pertidaksamaan yang lain.
- e. Solusinya adalah daerah yang merupakan irisan semua daerah jawab.



- f. Tentukan makna solusi ini dalam masalah awal.



Ayo Menggunakan Teknologi

Kalian dapat menggunakan *GeoGebra* untuk menggambarkan grafik sistem pertidaksamaan linear ini. Bandingkan hasilnya dengan grafik yang kalian buat.

Latihan 5.2

1. Bonar memiliki dua pekerjaan paruh waktu. Untuk mengantar barang, Bonar dibayar Rp15.000,00 per jam. Untuk pekerjaan mencuci piring di restoran, Bonar dibayar Rp9.000,00 per jam. Dia tidak dapat bekerja lebih dari 10 jam. Bonar membutuhkan uang sebesar Rp120.000,00. Berapa jam dia harus bekerja untuk masing-masing pekerjaan?
 - a. Tuliskan model matematikanya.
 - b. Apakah model matematika tersebut merupakan sistem pertidaksamaan linear?
 - c. Gambarkan grafiknya.
 - d. Tentukan koordinat titik-titik potongnya.

- e. Tentukan daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear.
- f. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dia butuhkan dengan bekerja mengantar barang selama 4 jam?
- g. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dibutuhkan jika bekerja selama 9 jam?

2. Nova membeli pupuk dan tanaman untuk kebunnya. Nova memiliki uang sebesar Rp100.000,00. Setiap kantong pupuk harganya Rp20.000,00 dan setiap tanaman harganya Rp10.000,00. Nova ingin membeli setidaknya 5 tanaman. Berapa banyak tanaman dan pupuk yang dapat Nova beli?
3. Bu Dini membutuhkan telur ayam dan telur puyuh. Telur ayam harganya Rp22.000,00 per kg dan telur puyuh harganya Rp30.000,00 per kg. Bu Dini memiliki uang sebesar Rp150.000,00. Karena khawatir telurnya pecah di perjalanan, Bu Dini tidak mau membawa lebih dari 6 kg telur. Apakah Bu Dini dapat membeli 6 kg telur?
4. Sebuah UMKM memproduksi dua jenis sabun cair, yaitu sabun mandi dan sabun cuci tangan. Untuk setiap liter sabun mandi, dibutuhkan biaya produksi Rp15.000,00 per liter. Biaya produksi sabun cuci tangan Rp10.000,00 per liter. Selain itu, pabrik juga harus mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp500.000,00. UMKM tersebut memiliki modal sebesar Rp2.500.000,00. Gudang yang ada dapat menampung 150 liter sabun cair. Sabun mandi dijual seharga Rp25.000,00 per liter dan sabun cuci tangan Rp20.000,00 per liter. Apakah mereka bisa mendapatkan keuntungan dengan harga tersebut? Berikan contoh banyaknya sabun mandi dan sabun cuci masing-masing yang dijual sehingga pendapatan mereka lebih dari pengeluaran.

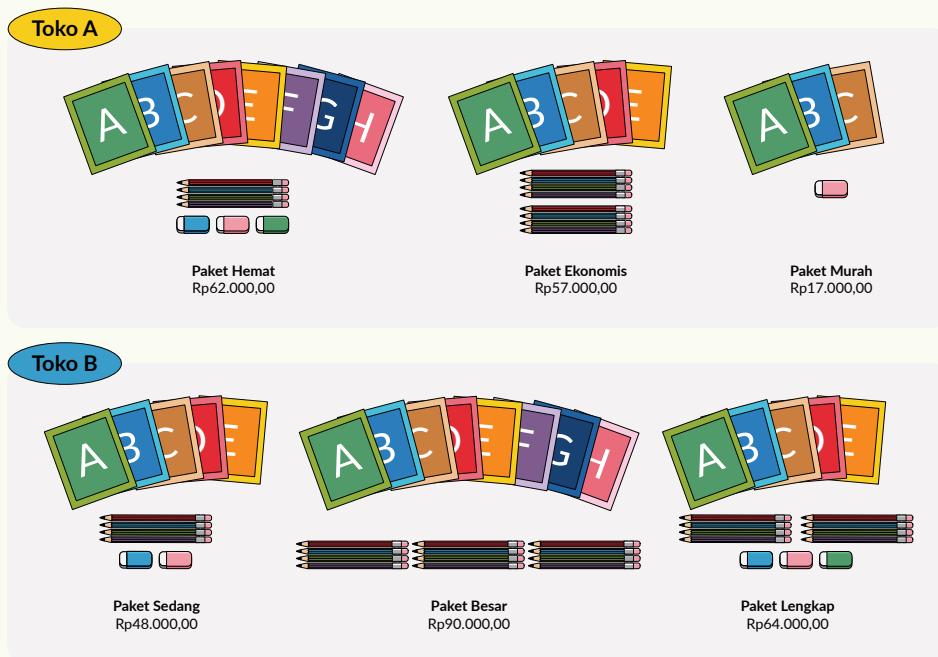
Refleksi

Dalam subbab ini kalian telah mempelajari tentang sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel.

1. Ada berapa pertidaksamaan yang dibutuhkan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel?
2. Apa yang terjadi jika banyaknya pertidaksamaan kurang dari dua? Apa yang terjadi jika banyaknya pertidaksamaan lebih dari dua?

Uji Kompetensi

1. Bu Sri bertugas untuk menyiapkan hadiah untuk siswa berprestasi di sekolah. Bu Sri telah menetapkan bahwa hadiah berupa alat tulis (buku tulis, pena, dan penghapus). Bu Sri mengunjungi dua toko alat tulis dan mendapatkan alat tulis dijual dalam bentuk paket sebagai berikut.



Berdasarkan harga tiap paket yang tersedia di toko A dan toko B, hitunglah harga dari setiap alat tulis di masing-masing toko (buku tulis, pena, dan penghapus) dan jawablah pertanyaan berikut.

- Manakah yang lebih mahal: harga sebuah buku tulis di toko A atau di toko B?
- Manakah yang lebih mahal: harga sebuah penghapus di toko A atau di toko B?
- Manakah yang lebih mahal: harga sebuah pena di toko A atau di toko B?

2. Pak Budi memiliki uang sebanyak Rp10.000.000,00. Ia ingin mendepositokan uangnya. Bank A memberikan bunga sebesar 4% dan bank B memberikan bunga sebesar 6%. Pak Budi ingin mendapatkan bunga setidaknya Rp550.000,00 namun ia tidak ingin mendepositokan uangnya pada satu bank saja. Apakah hal itu mungkin? Jika ya, sebutkan salah satu kemungkinannya.



Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2021

Matematika untuk SMA/SMK Kelas X

Penulis: Dicky Susanto, dkk

ISBN: 978-602-244-526-5

Bab

6

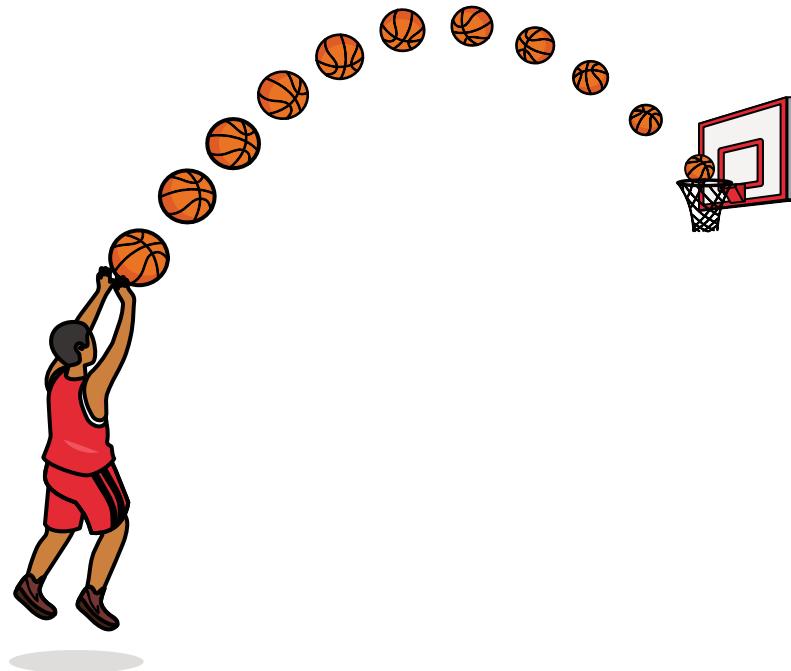
Fungsi Kuadrat

Pengalaman Belajar

Setelah mempelajari bab ini, kalian diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi fungsi kuadrat dalam bentuk aljabar, tabel nilai, dan grafik
2. Menemukan karakteristik dari fungsi kuadrat
3. Menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari dengan cara aljabar maupun grafik

Pernahkah kalian mengamati lintasan bola basket ketika kalian mendorong bola ke arah jaring? Lintasannya berbentuk parabola dan gerak bola dikatakan gerak parabola. Gambar 6.1 menunjukkan posisi bola pada suatu waktu tertentu.

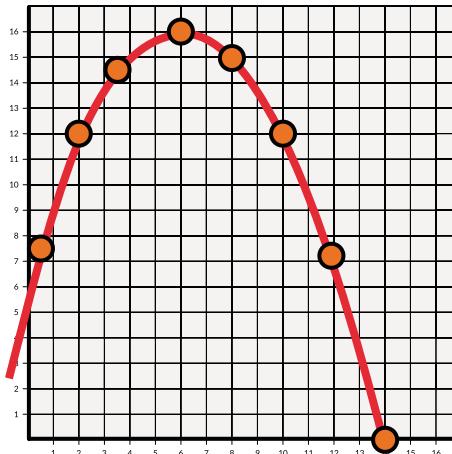


Gambar 6.1 Lintasan Bola Basket

Selain bola basket, lintasan bola kaki juga dapat berupa parabola. Lintasan dan bentuk parabola ditemui dalam hidup sehari-hari. Contoh lain adalah air yang keluar dari selang serta bentuk bangunan dan jembatan. Bentuk pisang juga menyerupai parabola.

Parabola merupakan bentuk fungsi kuadrat dalam grafik. Fungsi kuadrat adalah fungsi polinom (suku banyak) dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2. Kalian masih ingat dengan fungsi linear yang grafiknya berbentuk garis lurus. Fungsi linear adalah fungsi polinom dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.

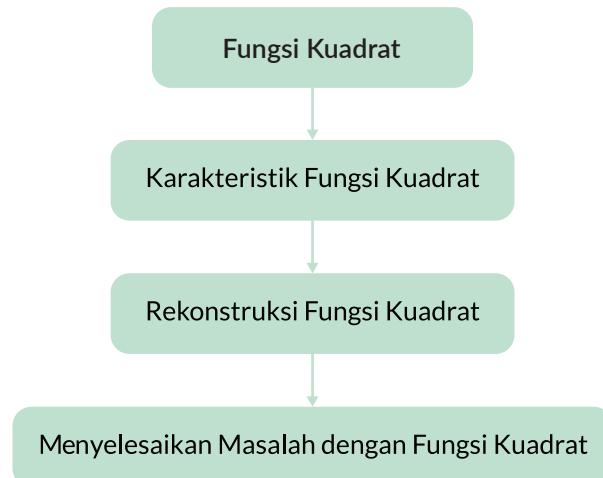
Gambar 6.2 menunjukkan grafik fungsi kuadrat. Posisi bola merupakan posisi titik dalam sistem koordinat Kartesius.



Gambar 6.2 Grafik Fungsi Kuadrat

Kata Kunci	Pertanyaan Pemantik
Fungsi kuadrat, parabola, persamaan kuadrat, minimum dan maksimum, titik puncak, sumbu simetri, titik potong dengan sumbu, diskriminan.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Apa saja karakteristik dari fungsi kuadrat? 2. Bagaimana mengonstruksi fungsi kuadrat berdasarkan informasi yang tersedia? 3. Bagaimana menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari?

Peta Konsep





Ayo Mengingat Kembali

Persamaan kuadrat dengan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan berbagai cara.

1. Faktorisasi

$$\begin{aligned}2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\(2x + 1)(x - 2) &= 0 \\x = -\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x &= 2\end{aligned}$$

2. Melengkapkan kuadrat

$$\begin{aligned}2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\2\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 1\right) &= 0 \\x^2 - \frac{3}{2}x - 1 &= 0 \\x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x &= 1 \\x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} &= 1 + \frac{9}{16} \\\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{25}{16} \\\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 &= \left(\frac{5}{4}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x - \frac{3}{4} &= \frac{5}{4} & x - \frac{3}{4} &= -\frac{5}{4} \\x &= \frac{3}{4} + \frac{5}{4} & \text{atau} & x = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \\x &= 2 & & x = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

3. Menggunakan rumus abc (Rumus Kuadrat)

Bentuk Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$

dengan $a \neq 0$ akar-akarnya dapat ditentukan dengan

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2 \cdot 2} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \\&= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \\&= \frac{3 \pm 5}{4}\end{aligned}$$

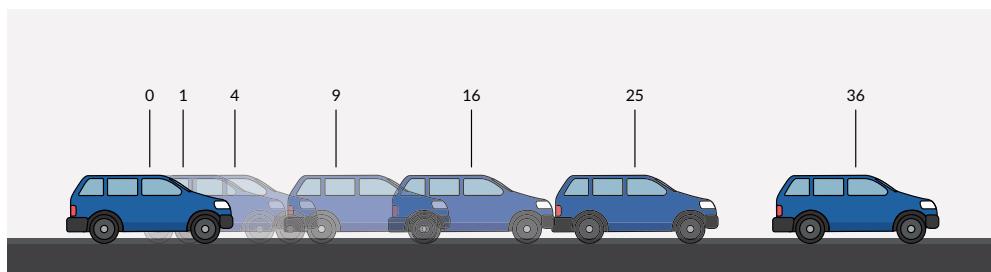
$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad x = 2$$

A. Karakteristik Fungsi Kuadrat

Eksplorasi 6.1 Menyelidiki fungsi kuadrat terbuka ke atas



Ayo Berekspolorasi



Gambar 6.3 Lintasan Mobil

1. Isilah tabel dengan jarak tempuh mobil terhadap waktu.

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)							

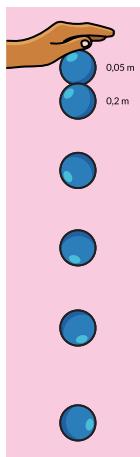
2. Bagaimana hubungan antara jarak dengan waktu?
3. Gambarkan grafik jarak terhadap waktu pada kertas berpetak.
4. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?

Eksplorasi 6.2. Menyelidiki fungsi kuadrat terbuka ke bawah



Ayo Bereksplorasi

Bola dijatuhkan dari keadaan diam pada posisi 0. Lintasan bola diberikan dalam gambar.



1. Lengkapi tabel dengan menggunakan penggaris.

Waktu (detik)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Posisi (m)	0	-0,05	-0,2			

2. Gambarkan grafik posisi terhadap waktu pada kertas berpetak.
3. Mengapa posisi menggunakan tanda negatif?
4. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?

Gambar 6.4 Lintasan Bola

Eksplorasi yang barusan kalian lakukan berkaitan dengan apa yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Kalian perlu eksplorasi fungsi kuadrat yang lebih mendalam untuk menemukan hal-hal yang sangat menarik.

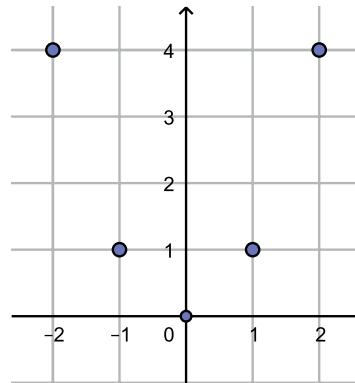
Sebelumnya, perhatikan terlebih dahulu contoh di bawah ini.

1. Buatlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ dengan cara:
 - a. Melengkapi Tabel 6.1

Tabel 6.1 Nilai x dan y untuk fungsi $f(x) = x^2$

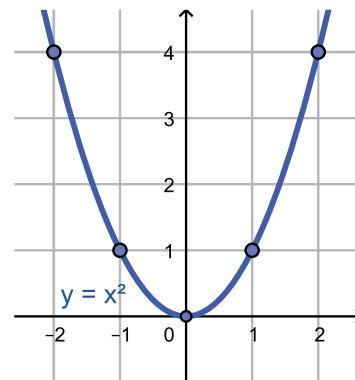
$f(x) = x^2$	
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

b. Plot setiap titik pada Tabel 6.1 ke dalam sistem koordinat. Koordinat titik yang didapatkan dari Tabel 6.1 adalah $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, dan $(2,4)$



Gambar 6.5 Plot titik pada grafik fungsi $f(x) = x^2$

c. Hubungkan titik-titik dalam sistem koordinat sehingga didapatkan grafik fungsinya.



Gambar 6.6 Grafik fungsi $f(x) = x^2$



Ayo Bekerja Sama

Kalian perlu bekerja sama untuk melakukan eksplorasi dengan menggambar grafik-grafik fungsi kuadrat terlebih dahulu. Jika kalian memiliki *graphic calculator* atau aplikasi *GeoGebra*, kalian boleh menggunakannya. Grafik yang digambar adalah $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah fungsi kuadrat yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Lakukan langkah-langkah yang sama untuk setiap fungsi kuadrat ini, gunakan kertas berpetak.

- a. $f(x) = -x^2$
- b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- c. $f(x) = -x^2 - x + 2$
- d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$
- e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$
- f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$
- g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
- h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$
- i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$
- j. $f(x) = 2x^2 + 1$

Hasil kerja kalian akan digunakan untuk eksplorasi.

Eksplorasi 6.3. Menyelidiki peran tanda pada nilai a (> 0 atau $a < 0$) dalam $f(x) = ax^2 + bx + c$



Ayo Bereksplorasi

Pelajari grafik-grafik a - j yang telah kalian buat sebelumnya. Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ kalian dapat menentukan peran a .

1. Tentukan fungsi-fungsi yang nilai $a > 0$
 - a. Apa kesamaan grafik fungsi-fungsi ini?
2. Tentukan fungsi-fungsi yang nilai $a < 0$
 - a. Apa kesamaan grafik fungsi-fungsi ini?

3. Mengapa dalam daftar fungsi kuadrat di atas tidak ada fungsi yang nilai $a = 0$?



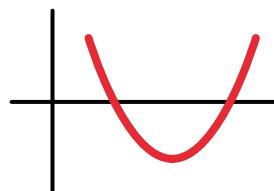
Ayo Berpikir Kritis

4. Lengkapi tabel dengan menggambar bentuk grafik

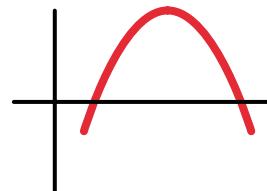
$f(x) = ax^2 + bx + c$	grafik berbentuk
$a > 0$	
$a < 0$	

Dari eksplorasi 6.1, 6.2, dan 6.3 kalian menemukan bahwa fungsi kuadrat terbuka ke atas jika $a > 0$ dan terbuka ke bawah jika $a < 0$.

$a > 0$



$a < 0$



Gambar 6.7 Dua Jenis Grafik Fungsi Kuadrat dengan Tanda a Berbeda

Untuk keadaan seperti apa grafik $a > 0$ digunakan dalam kehidupan sehari-hari?

Gerak mobil dimulai pada saat nol detik dan posisi nol m. Gerak menghasilkan grafik setengah parabola yang terbuka ke atas. Grafik berada di atas sumbu t.

Gerak mobil makin lama makin cepat karena untuk selang waktu yang sama jarak makin besar dan arahnya selalu ke kanan/timur.

Untuk keadaan seperti apa grafik $a > 0$ digunakan dalam kehidupan sehari-hari?

Gerak bola dimulai pada waktu nol detik dan posisi nol m. Gerak menghasilkan grafik setengah parabola saja yang terbuka ke bawah. Grafik berada di bawah sumbu t.

Gerak bola makin lama makin cepat (untuk selang waktu yang sama jarak makin besar) dan arahnya selalu ke bawah.



Ayo Berdiskusi

Mengapa Eksplorasi 6.1 dan 6.2 hanya menghasilkan grafik setengah parabola?

Eksplorasi 6.4 Menyelidiki peran nilai c dalam grafik fungsi kuadrat

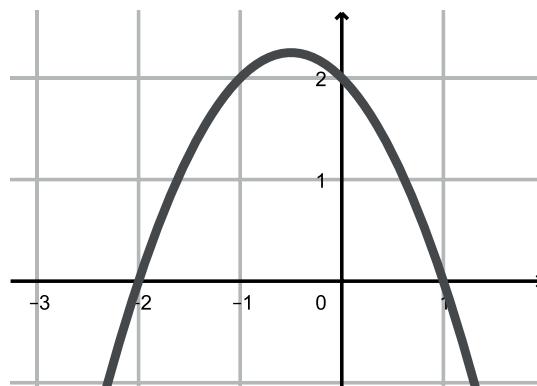
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Untuk setiap grafik fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang telah kalian buat, tentukan koordinat titik potong grafik dengan sumbu y .

1. Tentukan konstanta fungsi kuadrat yang menunjukkan titik potong grafik dengan sumbu y
2. Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, titik potong grafik dengan sumbu y terletak pada koordinat _____

Eksplorasi 6.4 menunjukkan peran c dalam fungsi kuadrat

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ yaitu menentukan titik potong grafik dengan sumbu y .



Gambar 6.8 Fungsi Kuadrat dengan c Berbeda

Nilai c menentukan titik potong grafik dengan sumbu y .